14/11

$f: E_1 \to E_2$, $x \in E_1$

f συνεχής στο $x \iff \left[(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall y \in E_1): \rho_1(x,y)<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(y))<\varepsilon\right]$

<u>Ορισμός</u>

f ομοιόμορφα συνεχής $\iff \left[(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x,y \text{ εν } E_1): \rho_1(x,y)<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(y))<\varepsilon\right]$

<u>Πχ 1</u>

$f(x)=\frac{1}{x}$, $x \in [1,2]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{xy}|x-y| \leq |x-y|$.

Θεωρώ ένα $\varepsilon>0$. Τότε για $\delta=\varepsilon$ ισχύει: $|x-y|<\delta(=\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

<u>Πχ 2</u>

$f(x)=\frac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$ δεν είναι ομ. συνεχής.

Έστω ότι f είναι ομ. συνεχής. Τότε για $\varepsilon=1$, θα υπάρχει

$\delta>0: |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<1$.

Ορίζω $z=\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}\right\}$ και παίρνω z

- $|f(2z)-f(z)| = \left|\frac{1}{2z}-\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2z} \geq 1$ γιατί $z \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2z} \geq 1$
- $|2z-z| = z < \delta$ γιατί $z \leq \frac{\delta}{2} < \delta$

$\rightarrow$ ΑΤΟΠΟ

<u>Εφαρμογή</u>

Ας είναι $f: E_1 \to E_2$ τέτοια ώστε να υπάρχει $c \geq 0$ με

$\rho_2(f(x), f(y)) \leq c\rho_1(x,y)$ για όλα τα x,y εν E_1

Τότε η f είναι ομ. συνεχής.

<u>Απόδειξη</u>

- Αν $c=0$ τότε η f είναι σταθερή, δηλ. $f(x)=k$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- Έστω $c \neq 0$, δηλ $c>0$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\rho_2(f(x), f(y))<\varepsilon$ αρκεί $c\rho_1(x,y)<\varepsilon$

δηλ. $\rho_1(x,y) < \frac{\varepsilon}{c} = \delta$

(52) Εφαρμογή

(E,ρ) $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$, $(E_1,\rho_1),\dots,(E_k,\rho_k)$ μ.χ.

$x=(x_1,\dots,x_k) \in E$
$y=(y_1,\dots,y_k) \in E$ με $\rho(x,y)=\sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\dots+\rho_k^2(x_k,y_k)}$

$E \ni x=(x_1,\dots,x_k) \xrightarrow{p_1} x_1$ με $p_1 : E \to E_1$

Θ.δ.ο. η p_i-προβολή είναι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση
$1 \leq i \leq k$, $p_i(x)=x_i$ με $p_i : E \to E_i$

$\rho_i(p_i(x)-p_i(y))=\rho_i(x_i-y_i)$

αρκεί ν.δ.ο. $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x,y): \rho(x,y)<\delta \Rightarrow \rho_i(p_i(x),p_i(y))<\varepsilon$.

$\rho_i(p_i(x),p_i(y)) = \rho_i(x_i,y_i) = \sqrt{\rho_i^2(x_i,y_i)} \leq \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\dots+\rho_i^2(x_i,y_i)+\dots+\rho_k^2(x_k,y_k)}$
$= \rho(x,y)$

Εφαρμογή

$f: E_1 \to E_2$, $g: E_2 \to E_3$, $g\circ f : \hat{E} \to E_3$ με $\hat{E} \subseteq E_1$ $(g\circ f)(x) = g(f(x))$

Έστω $\varepsilon>0$ τότε επειδή g είναι ομ. συν. ισχύει:
$(\exists \delta'>0)(\forall x,y \text{ εν } E_2): \rho_2(x,y)<\delta' \Longrightarrow \rho_3(g(x),g(y))<\varepsilon$ (*)
f ομ. συν. άρα $(\exists \delta>0)(\forall x,y \text{ εν } E_1): \rho_1(x,y)<\delta \Longrightarrow \rho_2(f(x),f(y))<\delta'$
Θεωρώ τυχόντα x,y εν E_1, με $\rho_1(x,y)<\delta$. Τότε
$\rho_2(f(x),f(y))<\delta' \overset{(*)}{\Longrightarrow} \rho_3(g(f(x)),g(f(y)))<\varepsilon \to \rho_3(g\circ f(x),g\circ f(y))<\varepsilon$
Άρα και η $g\circ f$ είναι ομ. συνεχής